Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Jahrgang 1911. 33. Abhandlung.

# Zur Integration der erweiterten LAGRANGE'schen partiellen Differentialgleichungen für kinetische Potentiale beliebiger Ordnung von mehreren abhängigen und unabhängigen Variabeln und Erweiterung des Schwerpunktprinzips

Von

Leo Koenigsberger
in Heidelberg

Eingegangen am 28. November 1911

Heidelberg 1911
Carl Winter's Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 698.

© Heidelberger Akademie der Wissenschaften 2010

© Heidelberger Akademie der Wissenschaften 2010

Wenn für ein kinetisches Potential erster Ordnung H von $\nu$ abhängigen und n unabhängigen Variabeln die Beziehung zwischen diesen Variabeln durch die $\nu$ LAGRANGE'schen partiellen Differentialgleichungen gegeben ist

$$(1) \qquad \frac{\partial H}{\partial p^{(s)}} - \sum_{1}^{n}{}_{\alpha} \frac{d}{d x_\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha^{(s)}} = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots \nu),$$

worin

$$p_\alpha^{(s)} = \frac{\partial p^{(s)}}{\partial x_\alpha}$$

ist, so werden unter der Voraussetzung, daß das von den unabhängigen Variabeln freie kinetische Potential nur von den Größen $p^{(s)}$ und

$$P^{(s)} = \sum_{1}^{n}{}_{\alpha} p_\alpha^{(s)}$$

abhängt, alle Integrale des partiellen Differentialgleichungsystems (1) dem erweiterten Energieprinzip [1])

$$(2) \quad E = H - \sum_{1}^{\nu}{}_{s} \sum_{1}^{n}{}_{\alpha} p_\alpha^{(s)} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha^{(s)}} = \omega (x_1 - x_n, x_2 - x_n, \ldots x_{n-1} - x_n)$$

genügen, worin $\omega$ eine willkürliche Funktion bedeutet.

Unter der gemachten Annahme für die Form des kinetischen Potentials werden nämlich die LAGRANGE'schen Gleichungen (1) in

$$(3) \qquad \frac{\partial H}{\partial p^{(s)}} - \sum_{1}^{n}{}_{\alpha} \frac{d}{d x_\alpha} \frac{\partial H}{\partial P^{(s)}} = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots \nu)$$

oder, wenn

$$\frac{\partial^2 p(\sigma)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = p_{\alpha\beta}^{(\sigma)}$$

gesetzt wird, in

[1]) Vgl. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften 1910, Abh. 10 und 1911, Abh. 17.



© Heidelberger Akademie der Wissenschaften 2010

$$(4)\quad \frac{\partial H}{\partial p^{(s)}} - \sum_1^{\nu}{}_\sigma \frac{\partial^2 H}{\partial P^{(s)}\,\partial p^{(\sigma)}}\, P^{(\sigma)}$$

$$-\sum_1^{\nu}{}_\sigma \frac{\partial^2 H}{\partial P^{(s)}\,\partial P^{(\sigma)}} \sum_1^{n}{}_{\alpha,\beta}\, p^{(\sigma)}_{\alpha\beta} = 0,$$

übergehen, während E die Form annimmt

$$(5)\quad E = H - \sum_1^{\nu}{}_s\, P^{(s)} \frac{\partial H}{\partial P^{(s)}},$$

und es ergibt sich unmittelbar durch Differentiation nach $x_\alpha$ und Summation für $\alpha = 1, 2, \ldots n$ die Beziehung

$$(6)\quad \sum_1^{n}{}_\alpha \frac{\partial E}{\partial x_\alpha} = \sum_1^{\nu}{}_s\, P^{(s)} \left(\frac{\partial H}{\partial p_s} - \sum_1^{n}{}_\alpha \frac{d}{d x_\alpha} \frac{\partial H}{\partial P^{(s)}}\right),$$

und somit für alle Integralsysteme von (3)

$$\sum_1^{n}{}_\alpha \frac{\partial E}{\partial x_\alpha} = 0 \text{ oder } E = \omega\,(x_1 - x_n,\ x_2 - x_n,\ \ldots\ x_{n-1} - x_n).$$

Betrachten wir zunächst den Fall einer abhängigen Variabeln p, wofür die LAGRANGE'sche Gleichung in

$$(7)\quad \frac{\partial H}{\partial p} - P\,\frac{\partial^2 H}{\partial P\,\partial p} - \frac{\partial^2 H}{\partial P^2} \sum_1^{n}{}_{\alpha,\beta}\, p_{\alpha\beta} = 0,$$

und das Energieprinzip in

$$(8)\quad E = H - P\frac{\partial H}{\partial P} = \omega\,(x_1 - x_n,\ x_2 - x_n,\ \ldots\ x_{n-1} - x_n)$$

übergeht, und sei eine partielle Differentialgleichung von der Form gegeben

$$(9)\quad \sum_1^{n}{}_{\alpha,\beta}\, p_{\alpha\beta} = f\,(p, P),$$

so wird man dieselbe stets in die LAGRANGE'sche Form bringen können, wenn man das kinetische Potential H aus der identisch zu befriedigenden Gleichung bestimmt

$$(10)\quad \frac{\partial H}{\partial p} - P\,\frac{\partial^2 H}{\partial P\,\partial p} - \frac{\partial^2 H}{\partial P^2}\, f\,(p, P) = 0,$$

welche durch Differentiation nach P und Substitution von

$$(11)\quad \frac{\partial^2 H}{\partial P^2} = K$$

© Heidelberger Akademie der Wissenschaften 2010

zur Bestimmung von K die partielle Differentialgleichung

$$(12)\quad P\frac{\partial K}{\partial p} + f(p, P)\frac{\partial K}{\partial P} = -\frac{\partial f(p, P)}{\partial P} K$$

liefert. Wird daher das allgemeine Integral der totalen Differentialgleichung

$$\frac{dP}{dp} = \frac{f(p, P)}{P}$$

in der Form

$$\lambda(p, P) = c \quad \text{oder} \quad p = \mu(P, c)$$

dargestellt, so wird sich mittels des Wertes von K nach (11) H in der Form ergeben

$$(13)\quad H = \iint \left[ e^{-\int \left(\frac{\partial f}{\partial P}\right)_{p=\mu(P,c)}} \right]_{c=\lambda(p,P)} \Omega(\lambda(p, P))\, dP\, dP + k(p) P + k_1(p),$$

worin $\Omega$ eine willkürliche Funktion bedeutet, und $\kappa(p)$, $\kappa_1(p)$ durch Einsetzen des Wertes von H in die Gleichung (10) zu bestimmen sind.

So liefert die partielle Differentialgleichung

$$(14)\quad \sum_1^n{}_{\alpha,\beta}\, p_{\alpha\beta} = \frac{P}{p},$$

wenn die willkürliche Funktion $\Omega = 1$ gesetzt wird,

$$K = \frac{1}{P}, \text{ also } H = P \log P - P + k(p) P + k_1(p)$$

und durch Substitution in (10), wenn $k(p) = 0$ angenommen wird,

$$(15)\quad H = P \log P - P + \log p.$$

Für diesen Wert des kinetischen Potentials geht nun das durch das Energieprinzip dargestellte Zwischenintegral von (14) in

$$(16)\quad P - \log p = \omega(x_1 - x_n, x_2 - x_n, \ldots x_{n-1} - x_n)$$

über, deren allgemeines Integral, wie unmittelbar zu sehen, wenn

$$\int \frac{dp}{\log p + a} = r(p, a)$$

gesetzt wird, durch

$$(17)\quad r(p, \omega(x_1 - x_n, \ldots x_{n-1} - x_n) = x_n + \omega_1(x_1 - x_n, \ldots x_{n-1} - x_n)$$

dargestellt wird, wenn $\omega$ und $\omega_1$ willkürliche Funktionen bedeuten.

© Heidelberger Akademie der Wissenschaften 2010

Für die Randbedingungen

$$(p)_{x_n=0} = F\ (x_1, x_2, \ldots x_{n-1}), \left(\frac{\partial p}{\partial x_n}\right)_{x_n=0} = F_1\ (x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$$

sieht man leicht, daß die willkürlichen Funktionen $\omega$ und $\omega_1$ durch die Gleichungen gegeben sind

$$\omega\,(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) = F_1\,(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$$
$$+ \sum_1^{n-1}{}_\alpha \frac{\partial F\,(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})}{\partial x_\alpha} - \log F\,(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$$

und

$$r\,(F\,(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}), \omega\,(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})) = \omega_1\,(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}).$$

Man braucht jedoch für die in der Form (9) gegebenen partiellen Differentialgleichungen als Zwischenintegral nicht direkt das Energieprinzip zu wählen und also auch nicht das kinetische Potential H in der oben angegebenen Weise herzuleiten, indem man unmittelbar eine von p und P abhängige Funktion $\varphi$ (p, P) bestimmen kann, für welche die Gleichung

$$(18) \quad \varphi\,(p, P) = \omega\,(x_1 - x_n, x_2 - x_n, \ldots x_{n-1} - x_n),$$

in der $\omega$ eine willkürliche Funktion darstellt, ein Zwischenintegral von (9) bildet. Differentiiert man nämlich (18) nach $x_\rho$ und bildet die Summe der so entstehenden Gleichungen für $\rho = 1, 2, \ldots n$, so ergibt sich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} P + \frac{\partial \varphi}{\partial P} \sum_1^n{}_{\alpha, \beta}\ p_{\alpha\beta} = 0,$$

und somit vermöge (9) zur Bestimmung von $\varphi$ die partielle Differentialgleichung

$$(19) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} P + \frac{\partial \varphi}{\partial P} f\,(p, P) = 0,$$

deren allgemeines Integral in der oben angewandten Bezeichnung durch

$$\varphi\,(p, P) = \omega\,(\lambda\,(p, P))$$

dargestellt ist — in dem obigen Beispiel folgt somit als Zwischenintegral

$$p\,e^{-P} = \omega\,(x_1 - x_n, x_2 - x_n, \ldots x_{n-1} - x_n),$$

also wieder das Energieprinzip.

Für die oben gemachte Annahme bezüglich der Form des kinetischen Potentials kann man die Betrachtung der partiellen

© Heidelberger Akademie der Wissenschaften 2010

Differentialgleichungen auf die totalen LAGRANGE'schen Differentialgleichungen und das Energieprinzip in der Mechanik wägbarer Massen reduzieren, wenn man erwägt, daß das allgemeine Integral

$$p = f(y + c)$$

der Differentialgleichung

$$F\left(p, \frac{dp}{dy}\right) = 0$$

durch die Substitution

$$y = x_n + \omega(x_1 - x_n, x_2 - x_n, \ldots x_{n-1} - x_n),$$

worin $\omega$ eine willkürliche Funktion bedeutet, in das allgemeine Integral

$$p = f(x_n + \omega(x_1 - x_n, x_2 - x_n, \ldots x_{n-1} - x_n)$$

der partiellen Differentialgleichung

$$F\left(p, \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial p}{\partial x_n}\right) = 0$$

übergeht.

Ebenso werden für den Fall von $\nu$ abhängigen Variabeln partielle Differentialgleichungsysteme von der Form

$$(20) \quad \sum_{\alpha, \beta}^{n}{}_{1} p_{\alpha\beta}^{(s)} = f_s\left(p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots p^{(\nu)}, P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots P^{(\nu)}\right)$$

$$(s = 1, 2, \ldots \nu)$$

durch ein System von Zwischenintegralen erster Ordnung

$$(21) \quad \varphi_s\left(p^{(1)}, \ldots p^{(\nu)}, P^{(1)}, \ldots P^{(\nu)}\right)$$

$$= \omega_s(x_1 - x_n, x_2 - x_n, \ldots x_{n-1} - x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots \nu)$$

integriert werden können, worin $\omega_s$ willkürliche Funktionen darstellen, indem die Differentiation von (21) nach $x_\rho$ und Summation der so entstehenden Gleichungen für $\rho = 1, 2, \ldots n$ mit Hilfe von (20) die für die $\varphi$-Funktionen identisch zu befriedigenden Gleichungen liefert

$$(22) \quad \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial p^{(1)}} P^{(1)} + \ldots + \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial p^{(\nu)}} P^{(\nu)} + \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial P^{(1)}} f_1$$

$$+ \ldots + \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial P^{(\nu)}} f_\nu = 0.$$

Sind daher

$$F_1, F_2, \ldots F_{2\nu-1}$$

$2\nu - 1$ voneinander unabhängige Integralfunktionen des totalen Differentialgleichungsystems von $2\nu - 1$ Gleichungen

© Heidelberger Akademie der Wissenschaften 2010

$$(23)\quad \frac{d\,p^{(1)}}{P^{(1)}} = \frac{d\,p^{(2)}}{P^{(2)}} = \ldots = \frac{d\,p^{(\nu)}}{P^{(\nu)}} = \frac{d\,P^{(1)}}{f_1} = \frac{d\,P^{(2)}}{f_2} = \ldots = \frac{d\,P^{(\nu)}}{f_\nu},$$

so wird man nur

$$(24)\quad \varphi_\sigma(p^{(1)}, \ldots p^{(\nu)}, P^{(1)}, \ldots P^{(\nu)}) = \Omega_\sigma(F_1, F_2, \ldots F_{2\nu-1}) \quad (\sigma = 1, 2, \ldots \nu)$$

zu wählen haben, worin $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_\nu$ voneinander unabhängige willkürliche Funktionen bedeuten. Für die nach (21) und (24) aus

$$\Omega_\sigma(F_1, F_2, \ldots F_{2\nu-1}) = \omega_\sigma(x_1 - x_n, x_2 - x_n, \ldots x_{n-1} - x_n) \quad (\sigma = 1, 2, \ldots \nu)$$

sich ergebenden Werte von $P^{(1)}, \ldots P^{(\nu)}$

$$\frac{\partial\,p^{(\sigma)}}{\partial\,x_1} + \frac{\partial\,p^{(\sigma)}}{\partial\,x_2} + \ldots + \frac{\partial\,p^{(\sigma)}}{\partial\,x_n} = \psi^{(\sigma)}(p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots p^{(\nu)}, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu) \quad (\sigma = 1, 2, \ldots \nu)$$

liefert sodann das totale Differentialgleichungsystem

$$\frac{d\,x_1}{1} = \frac{d\,x_2}{1} = \ldots = \frac{d\,x_n}{1} = \frac{d\,p^{(1)}}{\psi_1} = \frac{d\,p^{(2)}}{\psi_2} = \ldots = \frac{d\,p^{(\nu)}}{\psi_\nu},$$

wenn das allgemeine Integralsystem der Differentialgleichungen

$$(25)\quad \frac{d\,p^{(\sigma)}}{\psi_\sigma(p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots p^{(\nu)}, a_1, a_2, \ldots a_\nu)} = d\,x_n \quad (\sigma = 1, 2, \ldots \nu)$$

mit

$$(26)\quad \chi_\sigma(p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots p^{(\nu)}, x_n, a_1, a_2, \ldots a_\nu) = c_\sigma$$

bezeichnet wird, für $p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots p^{(\nu)}$ die gesuchten Werte mittels der Gleichungen

$$(27)\quad \chi_\sigma\big(p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots p^{(\nu)}, x_n, \omega_1(x_1 - x_n, \ldots x_{n-1} - x_n), \ldots \omega_\nu(x_1 - x_n, \ldots x_{n-1} - x_n)\big) = \Omega_\sigma(x_1 - x_n, \ldots x_{n-1} - x_n) \quad (\sigma = 1, 2, \ldots \nu),$$

worin die $\omega$ und $\Omega$ willkürliche Funktionen bedeuten.

Sei z. B. das partielle Differentialgleichungsystem mit 2 abhängigen und zwei unabhängigen Variabeln gegeben

© Heidelberger Akademie der Wissenschaften 2010

$$(28)\quad \begin{aligned} p_{11}^{(1)} + 2\,p_{12}^{(1)} + p_{22}^{(1)} &= p_1^{(2)} + p_2^{(2)}, \\ p_{11}^{(2)} + 2\,p_{12}^{(2)} + p_{22}^{(2)} &= -\,p_1^{(1)} - p_2^{(1)}, \end{aligned}$$

und werden mit Benutzung der früheren Bezeichnungen die Zwischenintegrale gesucht

$$(29)\quad \begin{aligned} \varphi_1\left(p^{(1)}, p^{(2)}, P^{(1)}, P^{(2)}\right) &= \omega_1\,(x_1 - x_2), \\ \varphi_2\left(p^{(1)}, p^{(2)}, P^{(1)}, P^{(2)}\right) &= \omega_2\,(x_1 - x_2), \end{aligned}$$

so hat man den Gleichungen (22) und (24) gemäß $\varphi_1$ und $\varphi_2$ zwei voneinander unabhängigen willkürlichen Funktionen von drei selbständigen Integralfunktionen des totalen Differentialgleichungsystems

$$\frac{d\,p^{(1)}}{P^{(1)}} = \frac{d\,p^{(2)}}{P^{(2)}} = \frac{d\,P^{(1)}}{P^{(2)}} = -\,\frac{d\,P^{(2)}}{P^{(1)}}$$

gleich zu setzen, und wählt man für diese die Ausdrücke

$$(\alpha)\quad P^{(2)} + p^{(1)},\ P^{(1)} - p^{(2)},\ P^{(1)^2} - p^{(1)^2} - 2\,p^{(1)}\,P^{(2)}$$

so wird man nach (24) und (21)

$$\Omega_1\,(P^{(2)} + p^{(1)}, P^{(1)} - p^{(2)}, P^{(1)^2} - p^{(1)^2} - 2\,p^{(1)}\,P^{(2)}) = \omega_1\,(x_1 - x_2)$$
$$\Omega_2\,(P^{(2)} + p^{(1)}, P^{(1)} - p^{(2)}, P^{(1)^2} - p^{(1)^2} - 2\,p^{(1)}\,P^{(2)}) = \omega_2\,(x_1 - x_2)$$

erhalten, worin $\Omega_1$ und $\Omega_2$ willkürliche Funktionen bedeuten, aus denen sich $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$, und hieraus wie oben $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$ ergibt. So erhalten wir aus den beiden ersten Integralen

$$P^{(2)} = -\,p^{(1)} + \omega_1\,(x_1 - x_2),\quad P^{(1)} = p^{(2)} + \omega_2\,(x_1 - x_2),$$

woraus sich leicht

$$\begin{aligned} p^{(1)} &= \omega_1\,(x_1 - x_2) + \Omega_1\,(x_1 - x_2)\sin x_1 + \Omega_2\,(x_1 - x_2)\cos x_1 \\ p^{(2)} &= -\,\omega_2\,(x_1 - x_2) + \Omega_1\,(x_1 - x_2)\cos x_1 - \Omega_2\,(x_1 - x_2)\sin x_1 \end{aligned}$$

ergibt, und für die Randbedingungen

$$(p^{(1)})_{x_2 = 0} = \lambda_1\,(x_1),\ \left(\frac{d\,p^{(1)}}{\partial\,x_2}\right)_{x_2 = 0} = \mu_1\,(x_1),\ (p^{(2)})_{x_1 = 0} = \lambda_2\,(x_1),$$
$$\left(\frac{\partial\,p^{(2)}}{\partial\,x_2}\right)_{x_2 = 0} = \mu_2\,(x_1)$$

die Integrale des partiellen Differentialgleichungsystems (28)

$$\begin{aligned} p^{(1)} = {} & \lambda_1\,(x_1 - x_2) + \lambda'_2\,(x_1 - x_2) + \mu_2\,(x_1 - x_2) - (\lambda'_2\,(x_1 - x_2) \\ & + \mu_2\,(x_1 - x_2))\cos x_2 + (\lambda'_1\,(x_1 - x_2) + \mu_1\,(x_1 - x_2))\sin x_2 \\ p^{(2)} = {} & \lambda_2\,(x_1 - x_2) - \lambda'_1\,(x_1 - x_2) - \mu_1\,(x_1 - x_2) + (\lambda'_2\,(x_1 - x_2) \\ & + \mu_2\,(x_1 - x_2))\sin x_2 + (\lambda'_1\,(x_1 - x_2) + \mu_1\,(x_1 - x_2))\cos x_2. \end{aligned}$$

© Heidelberger Akademie der Wissenschaften 2010

Hat das kinetische Potential mehrerer abhängiger und unabhängiger Variabeln für zwei bestimmt gewählte Indices s und $\sigma$ in den Größen $p^{(s)}$, $p^{(\sigma)}$, $P^{(s)}$, $P^{(\sigma)}$ die Form

$$\text{(a)} \quad H\left(p^{(s)^2} + p^{(\sigma)^2},\ P^{(s)^2} + P^{(\sigma)^2},\ p^{(s)} P^{(s)} + p^{(\sigma)} P^{(\sigma)}\right),$$

worin statt des dritten Arguments wegen

$$(p^{(s)^2} + p^{(\sigma)^2})(P^{(s)^2} + P^{(\sigma)^2}) - (p^{(s)} P^{(s)} + p^{(\sigma)} P^{(\sigma)})^2 = (p^{(s)} P^{(\sigma)} - p^{(\sigma)} P^{(s)})^2$$

auch der Ausdruck

$$p^{(s)} P^{(\sigma)} - p^{(\sigma)} P^{(s)}$$

substituiert werden kann, so folgt aus den zugehörigen LAGRANGE'schen Gleichungen (3)

$$(30) \quad \frac{\partial H}{\partial p^{(s)}} - \sum_1^n{}_\alpha \frac{d}{d x_\alpha} \frac{\partial H}{\partial P^{(s)}} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p^{(\sigma)}} - \sum_1^n{}_\alpha \frac{d}{d x_\alpha} \frac{\partial H}{\partial P^{(\sigma)}} = 0,$$

daß, weil

$$p^{(\sigma)}\left(\frac{\partial H}{\partial p^{(s)}} - \sum_1^n{}_\alpha \frac{d}{d x_\alpha} \frac{\partial H}{\partial P^{(s)}}\right) - p^{(s)}\left(\frac{\partial H}{\partial p^{(\sigma)}} - \sum_1^n{}_\alpha \frac{d}{d x_\alpha} \frac{\partial H}{\partial P^{(\sigma)}}\right)$$

$$= p^{(\sigma)} \frac{\partial H}{\partial p^{(s)}} - p^{(s)} \frac{\partial H}{\partial p^{(\sigma)}} + P^{(\sigma)} \frac{\partial H}{\partial P^{(s)}} - P^{(s)} \frac{\partial H}{\partial P^{(\sigma)}}$$

$$- \sum_1^n{}_\alpha \frac{d}{d x_\alpha}\left(p^{(\sigma)} \frac{\partial H}{\partial P^{(s)}} - p^{(s)} \frac{\partial H}{\partial P^{(\sigma)}}\right),$$

und nach der für das kinetische Potential H angenommenen Form (a) der Ausdruck

$$p^{(\sigma)} \frac{\partial H}{\partial p^{(s)}} - p^{(s)} \frac{\partial H}{\partial p^{(\sigma)}} + P^{(\sigma)} \frac{\partial H}{\partial P^{(s)}} - P^{(s)} \frac{\partial H}{\partial P^{(\sigma)}} = 0$$

ist, sämtliche Integrale des Systems der LAGRANGE'schen partiellen Differentialgleichungen auch der Gleichung genügen werden

$$(31) \quad \sum_1^n{}_\alpha \frac{d}{d x_\alpha}\left(p^{(\sigma)} \frac{\partial H}{\partial P^{(s)}} - p^{(s)} \frac{\partial H}{\partial P^{(\sigma)}}\right) = 0,$$

aus welcher folgt, daß

$$(32) \quad p^{(\sigma)} \frac{\partial H}{\partial P^{(s)}} - p^{(s)} \frac{\partial H}{\partial P^{(\sigma)}} = \nu\left(x_1 - x_n,\ x_2 - x_n,\ \ldots x_{n-1} - x_n\right),$$

worin $\nu$ eine willkürliche Funktion bedeutet.

© Heidelberger Akademie der Wissenschaften 2010

Solcher dem Flächenintegrale analoger partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, welche Zwischenintegrale des LAGRANGE'schen Differentialgleichungsystems bilden, erhalten wir noch andere bei analoger Zusammensetzung des kinetischen Potentials aus den anderen p und P, oder durch Summierung von Ausdrücken, welche der linken Seite von (32) analog sind.

Hat für zwei abhängige und n unabhängige Variable das kinetische Potential die Form

$$H\,(p^{(1)} + p^{(2)2},\ P^{(1)2} + P^{(2)2},\ p^{(1)}\,P^{(1)} + p^{(2)}\,P^{(2)}),$$

so werden das Energieprinzip und das Flächenintegral für die beiden LAGRANGE'schen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung die beiden Zwischenintegrale erster Ordnung mit zwei willkürlichen Funktionen liefern, und somit nach den obigen Auseinandersetzungen die weitere Integration gestatten.

So werden sich die oben behandelten partiellen Differentialgleichungen (28) mit Hilfe des kinetischen Potentials

$$(33)\quad H = P^{(1)2} + P^{(2)2} + p^{(1)}\,P^{(2)} - p^{(2)}\,P^{(1)}$$

in die LAGRANGE'sche Form setzen lassen, und daher die beiden Zwischenintegrale erster Ordnung durch das Energieprinzip

$$(34)\quad P^{(1)2} + P^{(2)2} = \omega\,(x_1 - x_2)$$

und das Flächenprinzip

$$(35)\quad p^{(1)}\,(2\,P^{(2)} + p^{(1)}) - p^{(2)}\,(2\,P^{(1)} - p^{(2)}) = \nu\,(x_1 - x_2)$$

dargestellt sein. Man sieht unmittelbar, daß diese beiden Zwischenintegrale sich aus den oben gefundenen Integralen (α) des zur Bestimmung von $\varphi_1$ und $\varphi_2$ aufgestellten totalen Differentialgleichungsystems in der Form ausdrücken lassen

$$(P^{(2)} + p^{(1)})^2 + (P^{(1)2} - p^{(1)2} - 2\,p^{(1)}\,P^{(2)}) = P^{(1)2} + P^{(2)2}$$

und

$$(P^{(1)} - p^{(2)})^2 - (P^{(1)2} - p^{(1)2} - 2\,p^{(1)}\,P^{(2)}) = p^{(1)}(2\,P^{(2)} + p^{(1)}) - p^{(2)}\,(2\,P^{(1)} - p^{(2)}).$$

Endlich kann analog dem früher von mir in der Mechanik einer unabhängigen Variabeln für kinetische Potentiale beliebiger Ordnung erweiterten Schwerpunktprinzip ein entsprechendes Theorem für partielle Differentialgleichungen aufgestellt werden, das hier für den vorher betrachteten Fall eines kinetischen Potentials erster Ordnung von 2 abhängigen Variabeln p und q und n unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ entwickelt werden soll.

© Heidelberger Akademie der Wissenschaften 2010

Seien zwei LAGRANGE'sche partielle Differentialgleichungen von der Form gegeben

$$\frac{\partial H}{\partial p} - \sum_\alpha \frac{d}{d x_\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = M, \quad \frac{\partial H}{\partial q} - \sum_\alpha \frac{d}{d x_\alpha} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = N,$$

worin M und N Funktionen von $x_1, \ldots x_n$, p, q sind, habe ferner, wenn

$$\xi = p + \omega (x_1, x_2, \ldots x_n, p - q), \quad \eta = \omega_1 (x_1, x_2, \ldots x_n, p - q)$$

gesetzt wird, und $\omega$, $\omega_1$ beliebige Funktionen bedeuten, das kinetische Potential in der oben benutzten Bezeichnungsweise die Gestalt

$$H = H_1 (x_1, \ldots x_n, \xi, \xi_1, \ldots \xi_n) + H_2 (x_1, \ldots x_n, \eta, \eta_1, \ldots \eta_n),$$

so werden, wie leicht zu sehen, die LAGRANGE'schen Gleichungen in

$$\left(1 + \frac{d\omega}{d(p-q)}\right) \left\{ \frac{\partial H_1}{\partial \xi} - \sum_\alpha \frac{d}{d x_\alpha} \frac{\partial H_1}{\partial \xi_\alpha} \right\} + \frac{\partial H_2}{\partial \eta} \frac{d\omega_1}{d(p-q)} = M$$

$$- \frac{d\omega}{d(p-q)} \left\{ \frac{\partial H_1}{\partial \xi} - \sum_\alpha \frac{d}{d x_\alpha} \frac{\partial H_1}{\partial \xi_\alpha} \right\} - \frac{\partial H_2}{\partial \eta} \frac{d\omega_1}{d(p-q)} = N$$

übergehen, aus denen durch Addition die Beziehung folgt

$$\frac{\partial H_1}{\partial \xi} - \sum_\alpha \frac{d}{d x_\alpha} \frac{\partial H_1}{\partial \xi_\alpha} = M + N,$$

welche das erweiterte Schwerpunktprinzip darstellt.

Die der Mechanik wägbarer Massen entsprechende Annahme, daß das kinetische Potential die Form hat

$$H = a (\Sigma_\alpha p_\alpha)^2 + b (\Sigma_\alpha q_\alpha)^2 + F (x_1, \ldots x_n, p - q, p_1 - q_1, \ldots p_n - q_n),$$

ergibt, wie leicht zu sehen, für

$$\xi = \frac{1}{a+b} (a p + b q)$$

den Ausdruck

$$H_1 = (a + b) (\Sigma_\alpha \xi_\alpha)^2,$$

so daß die LAGRANGE'sche Gleichung in $\xi$ in

$$- 2 (a + b) \{\Sigma_\alpha \xi_{\alpha\alpha} + 2 \Sigma_{\alpha, \beta} \xi_{\alpha\beta}\} = M + N$$

übergeht, welche dem einfachsten Falle des gewöhnlichen Schwerpunktprinzips[2]) entspricht.

Erweitern wir nun diese Betrachtungen auf kinetische Potentiale zweiter Ordnung, und zwar zunächst von einer abhängigen und zwei unabhängigen Variabeln, und definieren als LAGRANGE'sche partielle Differentialgleichung die Gleichung vierter Ordnung

[2]) Vgl. § 11 meiner Schrift „*Die Prinzipien der Mechanik*" 1900.

© Heidelberger Akademie der Wissenschaften 2010

$$(36)\quad L = \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{d}{d x_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{d}{d x_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{d^2}{d x_1^2}\frac{\partial H}{\partial p_{11}} + \frac{d^2}{d x_1\, d x_2}\frac{\partial H}{\partial p_{12}} + \frac{d^2}{d x_2^2}\frac{\partial H}{\partial p_{22}} = 0,$$

während das Energieprinzip durch

$$(37)\quad E = H - p_1\left(\frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{d}{d x_1}\frac{\partial H}{\partial p_{11}} - \frac{1}{2}\frac{d}{d x_2}\frac{\partial H}{\partial p_{12}}\right) - p_2\left(\frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{1}{2}\frac{d}{d x_1}\frac{\partial H}{\partial p_{21}} - \frac{d}{d x_2}\frac{\partial H}{\partial p_{22}}\right) - p_{11}\frac{\partial H}{\partial p_{11}} - p_{12}\frac{\partial H}{\partial p_{12}} - p_{22}\frac{\partial H}{\partial p_{22}} = \omega(x_1 - x_2)$$

dargestellt werden soll, so werden unter der Annahme, daß das kinetische Potential zweiter Ordnung H nur von

$$p,\ p_1 + p_2 = P,\ p_{11} + 2\,p_{12} + p_{22} = P'$$

abhängt, und

$$p_{111} + 3\,p_{112} + 3\,p_{122} + p_{222} = P'',\ p_{1111} + 4\,p_{1112} + 6\,p_{1122} + 4\,p_{1222} + p_{2222} = P'''$$

gesetzt wird, diese Gleichungen in

$$(38)\quad L = \frac{\partial^2 H}{\partial P'^2}P''' + \frac{\partial^3 H}{\partial P'^3}P''^2 + 2\left(P'\frac{\partial^3 H}{\partial P'^2\,\partial P} + P\frac{\partial^3 H}{\partial P'^2\,\partial p}\right)P'' + \frac{\partial H}{\partial p} - P\frac{\partial^2 H}{\partial P\,\partial p} - P'\frac{\partial^2 H}{\partial P^2} + P'^2\frac{\partial^3 H}{\partial P'\,\partial P^2} + P'\frac{\partial^2 H}{\partial P'\,\partial p} + P^2\frac{\partial^3 H}{\partial P'\,\partial p^2} + 2\,P\,P'\frac{\partial^3 H}{\partial P'\,\partial P\,\partial p} = 0$$

und

$$(39)\quad E = H - P\frac{\partial H}{\partial P} - P'\frac{\partial H}{\partial P'} + P\,P'\frac{\partial^2 H}{\partial P\,\partial P'} + P^2\frac{\partial^2 H}{\partial P'\,\partial p} + PP''\frac{\partial^2 H}{\partial P'^2} = \omega(x_1 - x_2)$$

übergehen. Da sich nun aus der Differentiation von E nach $x_1$ und $x_2$ die Beziehung ergibt

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} + \frac{\partial E}{\partial x_2} = P\,.\,L,$$

so folgt wiederum, daß alle Integrale der LAGRANGE'schen Gleichung (38) dem Energieprinzip (39), in welchem $\omega$ eine willkürliche Funktion bedeutet, Genüge leisten, und somit die partielle Differentialgleichung

© Heidelberger Akademie der Wissenschaften 2010

dritter Ordnung (39) ein Zwischenintegral der LAGRANGE'schen partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung (38) darstellt.

So werden für das kinetische Potential

$$H = p P^2 + P'^2 P$$

sämtliche Integrale der LAGRANGE'schen Gleichung

$$2 P P''' + 4 P' P'' - P^2 - 2 p P' = 0$$

die Energiegleichung

$$E = - p P^2 + 2 P^2 P'' = \omega (x_1 - x_2)$$

befriedigen.

Hat die partielle Differentialgleichung vierter Ordnung die Form

$$(40) \quad P''' = \bar{f}(p, P, P', P''),$$

ohne daß sie ein kinetisches Potential zweiter Ordnung zu besitzen braucht, so wird man ihr Zwischenintegral dritter Ordnung von der Form

$$(41) \quad \varphi (p, P, P', P'') = \omega (x_1 - x_2)$$

dadurch bestimmen können, daß man für $\varphi$ ein Integral der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} P + \frac{\partial \varphi}{\partial P} P' + \frac{\partial \varphi}{\partial P'} P'' + \frac{\partial \varphi}{\partial P''} \bar{f}(p, P, P', P'')$$

wählt — man sieht in dem obigen Beispiel, daß

$$\varphi = - p P^2 + 2 P^2 P''$$

dieser Gleichung Genüge leistet.

Soll das Zwischenintegral linear in $P''$ sein, also die Form haben

$$(42) \quad \varphi = f(p, P, P') P'' + F(p, P, P') = \omega (x_1 - x_2),$$

so würde die Differentialgleichung für $\varphi$ lauten

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p} P'' + \frac{\partial F}{\partial p}\right) P + \left(\frac{\partial f}{\partial P} P' + \frac{\partial F}{\partial P}\right) P' + \left(\frac{\partial f}{\partial P'} P'' + \frac{\partial F}{\partial P'}\right) P''$$
$$+ f \cdot \bar{f}(p, P, P', P'') = 0$$

und somit $\bar{f}$ vom zweiten Grade in $P''$ sein, und die Differentialgleichung vierter Ordnung, von welcher (42) ein Zwischenintegral ist, die Form annehmen

$$f P''' + \frac{\partial f}{\partial P'} P''^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial p} P + \frac{\partial f}{\partial P} P' + \frac{\partial F}{\partial P'}\right) P''$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial p} P + \frac{\partial F}{\partial P} P' = 0.$$

Man schließt daraus leicht, daß dann und nur dann, wenn

© Heidelberger Akademie der Wissenschaften 2010

$$F = \int \left( P \frac{\partial f}{\partial p} + P' \frac{\partial f}{\partial P} - 2 \frac{P'}{P} f \right) d P'$$

ist, die partielle Differentialgleichung vierter Ordnung ein kinetisches Potential zweiter Ordnung H besitzt, welches durch

$$H = \iint \frac{f}{P} \, d P' \, d P'$$

gegeben ist, und es ist dann das Zwischenintegral (42) das Energieprinzip.

Wir wollen endlich noch die dem Energie- und Flächenprinzip in der Mechanik wägbarer Massen analogen Zwischenintegrale der LAGRANGE'schen Gleichungen für ein kinetisches Potential zweiter Ordnung von zwei unabhängigen Variabeln $x_1$, $x_2$ und zwei abhängigen Variabeln p und q herleiten, wenn dieses in den früheren Bezeichnungen nur von p, q, P, Q, P', Q' abhängt.

Seien für ein beliebiges kinetisches Potential zweiter Ordnung H die beiden LAGRANGE'schen Gleichungen definiert durch

$$L_1 = \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{d}{d x_1} \frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{d}{d x_2} \frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{d^2}{d x_1^2} \frac{\partial H}{\partial p_{11}} + \frac{d^2}{d x_1 \, d x_2} \frac{\partial H}{\partial p_{12}} + \frac{d^2}{d x_2^2} \frac{\partial H}{\partial p_{22}} = 0$$

$$L_2 = \frac{\partial H}{\partial q} - \frac{d}{d x_1} \frac{\partial H}{d q_1} - \frac{d}{d x_2} \frac{\partial H}{\partial q_2} + \frac{d^2}{d x_1^2} \frac{\partial H}{\partial q_{11}} + \frac{d^2}{d x_1 \, d x_2} \frac{\partial H}{\partial q_{12}} + \frac{d^2}{d x_2^2} \frac{\partial H}{\partial q_{22}} = 0$$

und die Energie durch

$$\begin{aligned} E = H &- p_1 \left( \frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{d}{d x_1} \frac{\partial H}{\partial p_{11}} - \frac{1}{2} \frac{d}{d x_2} \frac{\partial H}{\partial p_{12}} \right) \\ &- p_2 \left( \frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{1}{2} \frac{d}{d x_1} \frac{\partial H}{\partial p_{21}} - \frac{d}{d x_2} \frac{\partial H}{\partial p_{22}} \right) \\ &- q_1 \left( \frac{\partial H}{\partial q_1} - \frac{d}{d x_1} \frac{\partial H}{\partial q_{11}} - \frac{1}{2} \frac{d}{d x_2} \frac{\partial H}{\partial q_{12}} \right) \\ &- q_2 \left( \frac{\partial H}{\partial q_2} - \frac{1}{2} \frac{d}{d x_1} \frac{\partial H}{\partial q_{21}} - \frac{d}{d x_2} \frac{\partial H}{\partial q_{22}} \right) \\ &- p_{11} \frac{\partial H}{\partial p_{11}} - p_{12} \frac{\partial H}{\partial p_{12}} - p_{22} \frac{\partial H}{\partial p_{22}} - q_{11} \frac{\partial H}{\partial q_{11}} - q_{12} \frac{\partial H}{\partial q_{12}} \\ &- q_{22} \frac{\partial H}{\partial q_{22}}, \end{aligned}$$

© Heidelberger Akademie der Wissenschaften 2010

so werden diese Gleichungen unter der Annahme, daß H nur von p, q, P, Q, P′, Q′ abhängt, in

$$(43)\quad \begin{cases} L_1 = \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{d}{dx_1}\frac{\partial H}{\partial P} - \frac{d}{dx_2}\frac{\partial H}{\partial P} + \frac{d}{dx_1}\left(\frac{d}{dx_1}\frac{\partial H}{\partial P'} + \frac{d}{dx_2}\frac{\partial H}{\partial P'}\right) + \frac{d}{dx_2}\left(\frac{d}{dx_1}\frac{\partial H}{\partial P'} + \frac{d}{dx_2}\frac{\partial H}{\partial P'}\right) = 0 \\ L_2 = \frac{\partial H}{\partial q} - \frac{d}{dx_1}\frac{\partial H}{\partial Q} - \frac{d}{dx_2}\frac{\partial H}{\partial Q} + \frac{d}{dx_1}\left(\frac{d}{dx_1}\frac{\partial H}{\partial Q'} + \frac{d}{dx_2}\frac{\partial H}{\partial Q'}\right) + \frac{d}{dx_2}\left(\frac{d}{dx_1}\frac{\partial H}{\partial Q'} + \frac{d}{dx_2}\frac{\partial H}{\partial Q'}\right) = 0 \end{cases}$$

und

$$(44)\quad E = H - P\frac{\partial H}{\partial P} - Q\frac{\partial H}{\partial Q} - P'\frac{\partial H}{\partial P'} - Q'\frac{\partial H}{\partial Q'}$$
$$+ P\left(\frac{d}{dx_1}\frac{\partial H}{\partial P'} + \frac{d}{dx_2}\frac{\partial H}{\partial P'}\right) + Q\left(\frac{d}{dx_1}\frac{\partial H}{\partial Q'} + \frac{d}{dx_2}\frac{\partial H}{\partial Q'}\right)$$

übergehen, und man verificiert wiederum leicht die Beziehung

$$\frac{dE}{dx_1} + \frac{dE}{dx_2} = P L_1 + Q L_2,$$

woraus folgt, daß alle Integralsysteme der Lagrange'schen Gleichungen (42) das Energieprinzip befriedigen

$$(45)\quad E = H - P\frac{\partial H}{\partial P} - Q\frac{\partial H}{\partial Q} - P'\frac{\partial H}{\partial P'} - Q'\frac{\partial H}{\partial Q'}$$
$$+ P\left(\frac{d}{dx_1}\frac{\partial H}{\partial P'} + \frac{d}{dx_2}\frac{\partial H}{\partial P'}\right) + Q\left(\frac{d}{dx_1}\frac{\partial H}{\partial Q'} + \frac{d}{dx_2}\frac{\partial H}{\partial Q'}\right)$$
$$= \omega(x_1 - x_2),$$

worin $\omega$ eine willkürliche Funktion ist, welches also ein Zwischenintegral dritter Ordnung der Gleichungen (42) darstellt.

Bildet man die Differenz der mit q und p multiplizierten Lagrange'schen Gleichungen (43), so folgt mittels einfacher Transformationen

$$p L_2 - q L_1 = p\frac{\partial H}{\partial q} - q\frac{\partial H}{\partial p} + P\frac{\partial H}{\partial Q} - Q\frac{\partial H}{\partial P} + P'\frac{\partial H}{\partial Q'}$$
$$- Q'\frac{\partial H}{\partial P'} - \left(\frac{dM}{dx_1} + \frac{dM}{dx_2}\right),$$

worin

© Heidelberger Akademie der Wissenschaften 2010

$$M = p\frac{\partial H}{\partial Q} - q\frac{\partial H}{\partial P} + 2\left(P\frac{\partial H}{\partial Q'} - Q\frac{\partial H}{\partial P'}\right)$$
$$-\frac{d}{dx_1}\left(p\frac{\partial H}{\partial Q'} - q\frac{\partial H}{\partial P'}\right) - \frac{d}{dx_2}\left(p\frac{\partial H}{\partial Q'} - q\frac{\partial H}{\partial P'}\right)$$

gesetzt wird.

Nehmen wir nunmehr an, daß das kinetische Potential die Form hat

$$(\beta)\quad H(p^2+q^2, P^2+Q^2, P'^2+Q'^2, pP+qQ, pP'+qQ', PP'+QQ'),$$

so wird die Gleichung

$$p\frac{\partial H}{\partial q} - q\frac{\partial H}{\partial p} + P\frac{\partial H}{\partial Q} - Q\frac{\partial H}{\partial P} + P'\frac{\partial H}{\partial Q'} - Q'\frac{\partial H}{\partial P'} = 0$$

identisch befriedigt, und es geht daher aus der Beziehung

$$p\,L_2 - q\,L_1 = -\left(\frac{dM}{dx_1} + \frac{dM}{dx_2}\right)$$

hervor, daß alle Integrale der beiden Lagrange'schen Gleichungen $L_1 = 0$ und $L_2 = 0$ der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(46)\quad M = p\frac{\partial H}{\partial Q} - q\frac{\partial H}{\partial P} + 2\left(P\frac{\partial H}{\partial Q'} - Q\frac{\partial H}{\partial P'}\right) -$$
$$\frac{d}{dx_1}\left(p\frac{\partial H}{\partial Q'} - q\frac{\partial H}{\partial P'}\right) - \frac{d}{dx_2}\left(p\frac{\partial H}{\partial Q'} - q\frac{\partial H}{\partial P'}\right) = \omega_1(x_1 - x_2)$$

Genüge leisten, worin $\omega_1$ eine willkürliche Funktion bedeutet, die Gleichung (46) also ebenfalls ein Zwischenintegral der Lagrange'schen Gleichungen ist.

Für die durch ($\beta$) angegebene Form des kinetischen Potentials zweiter Ordnung werden daher die Gleichungen (45) und (46) für die beiden Lagrange'schen partiellen Differentialgleichungen vierter Ordnung zwei Zwischenintegrale dritter Ordnung mit zwei willkürlichen Eunktionen liefern, aus denen sich, wenn

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial P'\,\partial Q'}\right)^2 - \frac{\partial^2 H}{\partial P'^2}\cdot\frac{\partial^2 H}{\partial Q'^2}$$

nicht identisch Null ist, $P''$ und $Q''$ als Funktionen von $p$, $q$, $P$, $Q$, $P'$, $Q'$, $\omega$ und $\omega_1$ ergeben, und diese Differentialgleichungen werden wieder nach den früheren Ausführungen integriert werden können.

Es ist leicht ersichtlich, daß alle diese Sätze auf kinetische Potentiale beliebiger Ordnung von mehreren abhängigen und unabhängigen Variabeln ausgedehnt werden können.



© Heidelberger Akademie der Wissenschaften 2010